

Bir Metageometri Olarak Projektif Geometri'nin Temelleri Üzerine Felsefi Bir İnceleme

A Philosophical Study on the Foundations of Projective Geometry as A Metageometry

BUŞRA AŞIK BİRLİK 

Düzce University

UĞUR EKREN 

Istanbul University

Received: 22.08.2024 | Accepted: 29.12.2024

Abstract: Throughout history, research on the foundations of mathematics, particularly the debates surrounding Euclid's fifth postulate, has led to the emergence of the concept of metageometry. This paper examines the problems created by Euclid's fifth postulate in a historical and philosophical context, the contributions to the development of non-Euclidean geometries, and how projective geometry was established as a metageometry during this process. The article notes that the first steps of projective geometry began with the Renaissance architect and artist Leon Battista Alberti and were mathematically grounded through the contributions of the French mathematician Girard Desargues. Additionally, the works of mathematicians like Jean Victor Poncelet and Felix Klein facilitated the development of projective geometry and the acceptance of non-Euclidean geometries. The paper evaluates the philosophical background of these developments through Kant's transcendental philosophy and discusses Russell's thoughts and contributions to metageometry. In this context, the article provides a deep analysis of both the historical development and philosophical foundations of projective geometry.

Keywords: Metageometry, projective geometry, Alberti, Desargues, Kant, Russell.

✉ Buşra Aşık Birlik

Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü
81620, Düzce, Türkiye | busraasikbirlik@duzce.edu.tr

✉ Uğur Ekren

İstanbul Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü
34459, İstanbul, Türkiye | 1883wagner@gmail.com



Giriş

1-Bir Metageometri Olarak Projektif Geometrinin Kuruluşu

Matematiğin temellerine ilişkin araştırmalar özellikle de Frege, Dedekind, Peano çizgisinde yürütülen aritmetiğin temellerine ilişkin araştırmalar matematikte yaşanan krizlere nihayet verme ve bir çözüm sunma çabaları olarak tarif edilebilir. Aslında matematiğe ilişkin ilk kriz görece olarak aritmetikte ortaya çıkan *sayı* ile ilgili sorunlardan öncesine tarihlenebilir. İlk kriz, geometrinin en temel ve sistematik sunumu olan Öklid geometrisinin temellerinde ortaya çıkmaktadır. Paralel postulatı (veya aksiyomu) olarak bilinen postulatanın Öklid geometrisi içerisinde sistemde bir gedik oluşturduğu çok erken tarihlerde matematikçiler tarafından tespit edilmiş¹ ve söz konusu postulat tatmin edici bulunmamıştır. Bu sorun özellikle Russell tarafından dikkate değer biçimde vurgulanmıştır:

“Ortodoks Öklidciliğin sıvılaşmış şekli paraleller aksiyomudur ve kanıt olmaksızın bu aksiyomun kabulünün reddedilmesi Metageometrinin başlangıcıdır. Bu yönde ilk çaba ilhamını bu aksiyomu diğerlerinden çıkarsamak umudunda olan Legendre² tarafından denenmiştir. Artık bildiğimiz

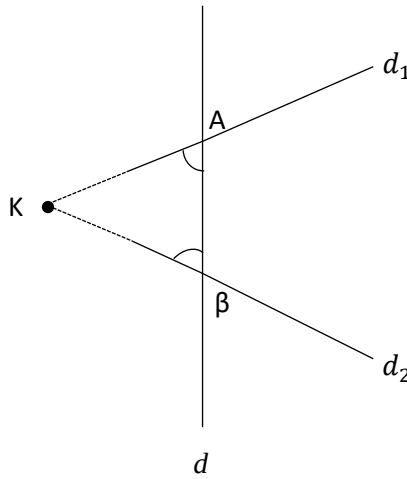
¹ “Öklid’in beşinci (paralel) postulatı, onun bir matematikçi olarak büyüklüğünün ana köşe taşlarından biridir. Heath, Euclid’in Elementler’ine yaptığı yorumda şöyle der: “Yirmi yüzyıldan fazla bir süre boyunca, çoğu yetenekli geometriler tarafından yapılan sayısız ardışık girişimi düşündüğümüzde, geometrisinin bütün sisteminin geçerliliği için gerekli bulduğu böyle bir hipotezin gerçekten kanıtlanamaz olduğu sonucuna varan adamın dehasına hayran kalmamak elde değil.” Ancak, Öklid’in büyüklüğünün bu temel taşı, onun sistemine yapılan en keskin saldırıların da temelini oluşturuyordu. Ondan önceki dört postulat kısa, basit ifadelerden oluşuyordu ve beşinci postulatın çok daha karmaşık yapısı, bunun bir varsayımından ziyade bir teorem olması gerektiğini öne sürdü—bu görüş, Öklid’in kendisi tarafından da farkında olmadan desteklendi, çünkü o, postulatın tersini kanıtladı. Dolayısıyla, çok kısa bir süre içinde, bu kusuru Elementler’den kaldırma girişimleri başladı. Bu çabalar, Öklid’in ömrü boyunca başlamış ve on dokuzuncu yüzyılın ikinci on yılına kadar itibarlı matematikçiler tarafından, daha sonra da şarlatanlar tarafından devam etmiştir. Tüm bu girişimlerin başarısız olması, Öklid’in ününü sağlamlaştırmış ve daha da önemlisi, Öklid dışı geometrinin icadına yol açmıştır.” (Blumenthal, 1980, 17-18)

² Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Fransız bir matematikçidir. Matematik dünyasında önemli katkılarda bulunmuştur. Legendre polinomları, Legendre dönüşümleri ve en küçük kareler yöntemi gibi matematiksel kavramlarla tanınır. “Éléments de Géométrie” adlı eseri uzun süre geometri eğitiminde temel kaynak olarak kullanılmıştır. Ayrıca, asal sayıların dağılımına ilişkin çalışmaları, Riemann



kadarıyla – kaçınılmaz bir şekilde- başarısızlığa uğramış bir umut.” (Russell, 1956)

Russell, burada metageometri ile tüm Öklid dışı geometrileri ima etmektedir. Dolayısıyla paralel postulatının yarattığı itirazlar tüm Öklid dışı geometrilerin başlangıç noktasını da oluşturmaktadır. Bu sebeple ilkin bu postulat ve bu postulatının sebep olduğu soruna göz atılması, geometrinin temelleriyle ilgili yaşanmış olan krizin anlaşılmasında ve metageometrinin imkanının görülmesi açısından faydalı olacaktır. Öklid'in beşinci postulası şu anlama gelir: İki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğru ile aynı tarafta, toplamaları iki dik açıdan küçük açılar meydana getirirse, bu iki doğrunun uzantıları açılarının iki dik açıdan küçük olduğu tarafta bir noktada kesişeceklerdir.



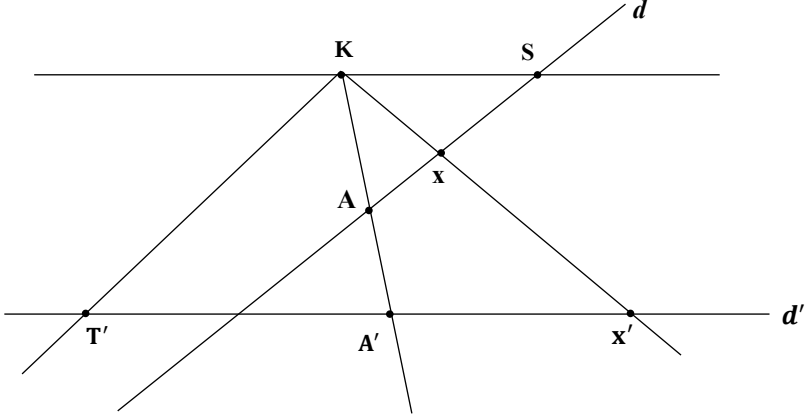
Şekil I

Yukarıda ifade edilen postulatadan çıkan sonuç, bir noktaya dışındaki bir noktadan ancak ve ancak bir paralel doğru çizilebileceğidir. İşte, matematikçilerin itirazı tam da bu postulatadan çıkarılmış söz konusu sonuca ilişkindir. Şöyle ki Öklid düzleminde mesela kesişen d ve d' doğrularını düşünelim. d ve d' nin noktalarını bu doğrular üzerinde bulunmayan

hipotezine giden yolu açmıştır. 18. ve 19. yüzyıllarda matematik ve bilim dünyasında etkili bir figür olarak tanınmıştır.



bir K noktası yardımıyla birbirine eşleyelim. d' üzerindeki herhangi bir x noktasına Kx doğrusu ile d' nin orta noktası karşılık gelsin, ki buna K merkezli izdüşüm adı verilebilir. Bu durumda d' nin her x noktasını d' nün x' noktasına eşleyen $d \rightarrow d'$ ne " $x \rightarrow f_{K'}(x) = K_x \cap d' = x'$ " fonksiyonunu elde etmiş oluruz.



Şekil II

Yukarıdaki şekilde görüldüğü üzere $KS//d'$ ve $KT'//d$ olduğundan matematikçiler bu durumla ilgili ortaya çıkan aşağıdaki sorulara yanıt aramışlar ve tatmin edici bir yanıtın verilemeyeceğini görmüşlerdir.

1) d' nin S noktası d' nin hangi noktası ile eşleşir? Böyle bir noktanın bulanamayacağı açık bir şekilde görülür.

2) d' nin T' noktası d nin hangi noktasının görüntüsüdür? Öklid düzlemi içerisinde böyle bir noktanın da bulanamayacağı açık bir şekilde görülmüştür.

Bu sebeple Öklid geometrisi içerisinde bu postulatayla ilgili bir gedik oluşmuş ve bu postulatının ya tamamen kaldırılması ya da ispat edilmesi yönünde itirazlar gelmiştir. Bu postulatının ispat edilebileceğine



inanınların tüm çabaları sonuçsuz kalmıştır. Ancak Lobaçevski³ ve Gauss⁴ paralellik postulatının ispatının mümkün olmadığını göstermiştir. Matematikçiler yukarıdaki sorulara doğru yanıt verebilmek için Öklid dışı geometrilerin ve dolayısıyla Öklid dışı uzayların imkanını araştırmaya başlamışlardır. Matematik dünyasında bu çaba metageometrilerin temellerinin atılmasına vesile olduğu gibi bir metageometri olan projektif geometrinin temellendirilmesini de sağlamıştır.

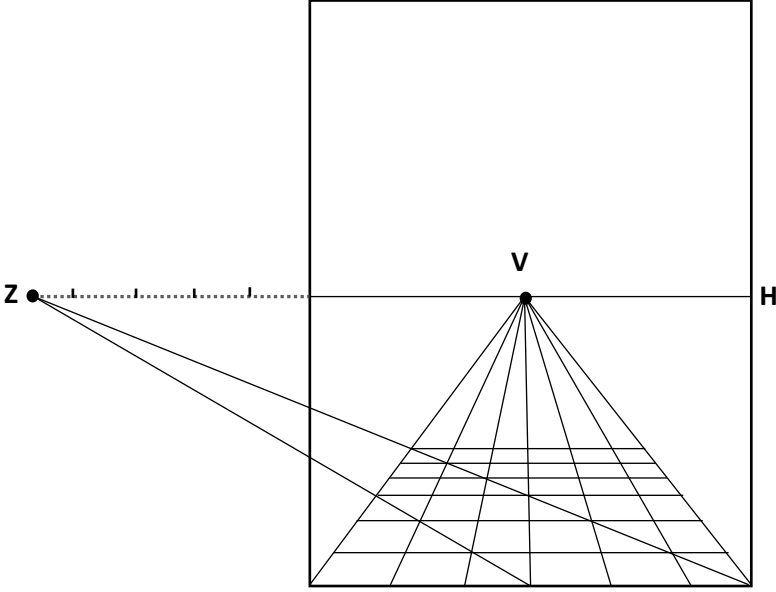
Aslında projektif geometrinin temellerinin atılmasına ilişkin ilk girişimler beklentilerin aksine matematik dünyasından gelmemiştir. Buradaki öncü isim Rönesans döneminin ünlü mimar ve sanatçısı olan Leon Battista Alberti⁵'dir. Alberti, üç boyutlu yapıları iki boyutta çizmek için doğrusal bir perspektifin oluşturulması yönünde geometrik yöntemler kullanan ilk kişidir. Daha sonraki matematikçiler Alberti'nin bu yöntemini projektif geometrinin ilk adımları olarak saymışlardır.

³ Nikolay İvanoviç Lobaçevski (1792-1856), Rus matematikçi ve geometridir. Lobaçevski, Öklid dışı geometriyi geliştirmesiyle tanınır ve genellikle "geometrinin Copernicus'u" olarak anılır. Onun çalışmaları, matematik ve bilim dünyasında önemli bir devrim yaratmıştır. Lobaçevski'nin en önemli katkısı, Öklid dışı geometriyi (Lobaçevski geometri) geliştirmesidir. Öklid dışı geometri, paralellik aksiyomunu (bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnızca bir paralel çizilebilir) reddeder ve bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebileceğini öne sürer. Bu yeni geometri türü, daha sonra hiperbolik geometri olarak adlandırılmıştır.

⁴ Carl Friedrich Gauss (1777-1855), "matematiğin prensi" olarak anılan Alman matematikçi, fizikçi ve astronomdur. Matematik, fizik ve astronomi alanlarında çok geniş yelpazede önemli katkılarda bulunmuştur. Sayı teorisinde çığır açan "Disquisitiones Arithmeticae" adlı eseri, modern sayı teorisinin temelini oluşturur. Gauss, cebir, analiz, diferansiyel geometri ve Öklid dışı geometri konularında da önemli çalışmalar yapmıştır. Ayrıca, gök cisimlerinin yörüngelerinin hesaplanması, manyetizma ve elektrik gibi fiziksel bilimlerde de büyük ilerlemeler kaydetmiştir. Gauss'un çalışmaları, modern matematiğin ve bilimin gelişiminde derin bir etki bırakmıştır.

⁵ Leon Battista Alberti (1404-1472), İtalyan Rönesans dönemi çok yönlü bir deha ve hümanisttir. Hem teorik hem de pratik alanlarda önemli katkılarda bulunmuştur. Mimarlık, resim, heykel, matematik, edebiyat ve felsefe gibi birçok alanda eserler vermiştir. Alberti, Rönesans döneminde perspektifin matematiksel temellerini atan önemli figürlerden biridir. 1435 yılında yazdığı "De Pictura" (Resim Üzerine) adlı eserinde, üç boyutlu nesnelerin iki boyutlu yüzeye doğru bir şekilde nasıl yansıtılacağını açıklamıştır. Bu kitap, perspektifin doğru kullanımı için gerekli olan geometrik ilkeleri detaylandırmıştır ve Rönesans sanatçıları arasında büyük etki yaratmıştır. Bknz. (Alberti, 2011) Ayrıca bknz. (Williams vd., 2010)





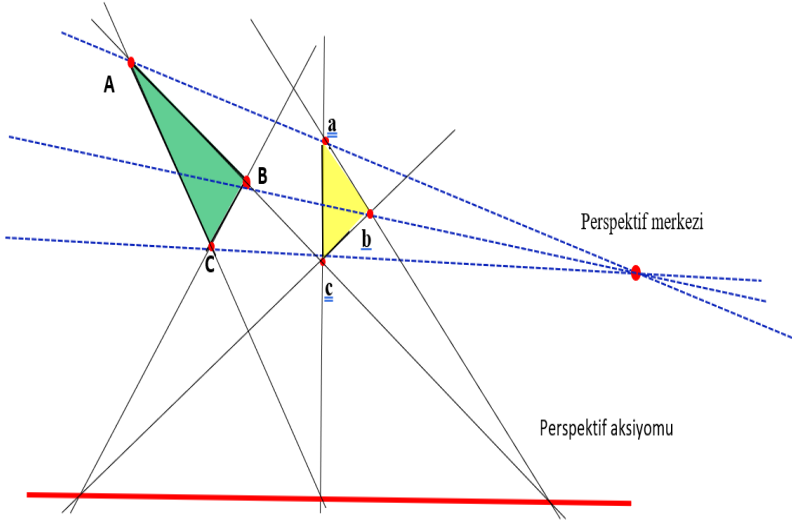
Şekil III: Alberti'nin Perspektif Çizimi

Alberti'nin perspektifle ilgili çalışmalarını sanatın ötesine yani matematiğin alanına taşıyan isim ise Fransız matematikçi Girard Desargues⁶ olmuştur. Desargues, Alberti'nin fikirlerini projektif geometriyi temellendirmek için kullanmış ve perspektif üçgenler ile ilgili teoremiyle geometri alanında Öklid dışı geometrilere yani Russell'ın ifadesiyle metageometrilere ulaştıran sonuçlara varmıştır. Desargues'e göre üçgenlerin karşılık gelen kenarları uzatıldığında perspektif eksenini adı verilen bir doğru üzerindeki noktalarda bunlar buluşmaktadır. Üçgenler üzerindeki köşelerden geçen doğrular perspektifin merkezi denilen bir noktada kesişmektedir. Bu iki

⁶ Girard Desargues (1591-1661), Fransız matematikçi ve mühendis olup, projektif geometri alanının kurucularından biridir. Desargues, perspektif ve konik kesitler üzerine çalışmalarıyla tanınır ve özellikle "Desargues Teoremi" olarak bilinen önemli bir geometrik teoremi geliştirmiştir. Bu teorem, projektif geometri alanında temel bir rol oynar ve perspektif çizimlerin matematiksel temellerini oluşturur. Desargues'un çalışmaları, mimari ve mühendislik uygulamalarında perspektifin doğru kullanımı için önemli ilkeler sunmuştur. Ayrıca, onun geometrik yenilikleri, daha sonra Blaise Pascal ve Jean-Victor Poncelet gibi matematikçileri de etkilemiştir. Bknz. (Field & Gray, 2012).



koşuldan ilkinin oluşu ikincisi için gerekli ve yeterlidir. Dolayısıyla Desargues'e göre iki üçgen ancak ve ancak merkezi olarak perspektif içinde ise eksen olarak perspektif içindedir.



Şekil IV: Desargues Teoremi

Desargues'in yukarıda ifade etmiş olduğu teorem, 19. yy başlarında Jean Victor Poncelet⁷'in çalışmalarına esin kaynağı olmuştur. Poncelet, projektif geometrinin gelişmesine büyük katkı sağlamış ve yukarıda anılan üçgenlerle ilgili üç boyutlu uzayda geçerli olan şu teoremi formüle etmiştir: İki üçgen, bir kişi onları tek bir noktadan perspektif içinde görecektir şekilde yerleştirildiğinde, karşılıklı kenarlarının her biri bir doğru üzerinde hizalanacaktır. Bu durumun gerçekleşebilmesi için ise bu doğruların birbirine paralel olması gerekecektir. Bu kenarlardan bir çiftin paralel olması üç kesişim noktası yerine iki kesişim noktasının oluşmasına sebep olacaktır. Bu durumda teorem yeniden uygulanır ve bu kez iki nokta, üçgenlerin paralel kenarlarının paralel doğrular üstünde bulunacak şekilde yerleştirilmesi

⁷ Jean-Victor Poncelet (1788-1867), Fransız mühendis ve matematikçidir. Poncelet, özellikle projektif geometri üzerine yaptığı çalışmalarla tanınır. Matematiksel çalışmaları, özellikle askeri mühendislik ve mekanik mühendislik alanlarına büyük katkılar sağlamıştır. En önemli eserlerinden biri olan "Traité des propriétés projectives des figures" (Şekillerin Projektif Özellikleri Üzerine İnceleme) adlı kitabı, projektif geometrinin ilkelerini detaylandırmış ve bu alandaki temel teoremleri ortaya koymuştur. Ayrıca, Poncelet'in çalışmaları, özellikle hiperbolik geometri ve karmaşık sayılar üzerine olan araştırmalarıyla da bilinmektedir.



şeklinde uygulanır. Poncelet, burada teoremi değiştirmek yerine teoremin temeli olan Öklid uzayını değiştirmiştir. Böylece bu değişimle Öklid dışı bir uzayı tanımlayarak bir metageometri olarak projektif geometrinin gelişimine katkıda bulunmuştur. Bu yeni projektif uzayda bulunan doğrular keşişim noktaları sonsuzda olan paralel doğruları gösterir. Böylece yukarıda andığımız Desargues'ın teoreminin Öklid uzayı yerine projektif bir uzayı temele alan projektif bir geometride kolaylıkla temellendirilebileceğini göstermiş olmaktadır.

Russell, yukarıda sözünü ettiğimiz projektif geometrinin başlangıcıyla ilgili tüm gelişmeleri metageometri içerisinde bölümlediği dönemleri gözeterek etiketlemektedir. Aslında Russell, Legendre'nin beşinci postulatı diğerinden çıkarsaması başarısızlığa uğradıktan sonra Gauss, Lobachevski, Bolyai⁸'nin söz konusu beşinci postulatı reddederek yine de mantıksal olarak tutarlı bir geometrinin kurulabileceği yönündeki çalışmalarını metageometri içinde ilk dönem olarak sınıflamaktadır. Russell, ikinci dönemin ise Rieman⁹ tarafından yapılan çalışmalarla başlatıldığını amaçları açısından felsefi ve yöntemleri açısından ise yapıcı olduğunu ifade etmektedir. Rieman, Russell'a göre analitik, metrik¹⁰ geometrileri benimseyerek

⁸ János Bolyai (1802-1860), Macar matematikçi ve fizikçidir. Bolyai, babası Farkas Bolyai ile birlikte bağımsız olarak hiperbolik geometriyi geliştirmesiyle tanınır. Özellikle, Öklid dışı geometri olarak da bilinen bu geometri türü, Ökliden geometrinin paralel postulatını reddetmektedir. Bolyai'nin "Appendix" (Független Bevezetés a Geometriába) adlı çalışması, bu geometrik düşünceleri içermektedir ve matematik dünyasında büyük yankı uyandırmıştır. Bolyai ayrıca matematiksel analiz, cebir ve fizik alanlarında da çalışmalar yapmış ve önemli katkılarda bulunmuştur.

⁹ Bernhard Riemann (1826-1866), Alman matematikçi ve fizikçi olarak tanınır. Matematiksel analiz, diferansiyel geometri, sayı teorisi ve matematiksel fizik alanlarında önemli katkılar yapmıştır. Riemann'ın en önemli katkılarının biri, Riemann geometrisi olarak bilinen ve fizikte ve genel görelilik teorisinde temel bir rol oynayan geometri türünü geliştirmesidir. Özellikle, Riemann'ın diferansiyel geometri üzerine yaptığı çalışmalar, Ökliden geometrinin sınırlarını aşarak farklı geometrik yapıların mümkün olduğunu göstermiştir. Riemann, uzayın özelliklerini daha geniş bir perspektiften ele almış ve farklı eğrilik türlerini matematiksel olarak tanımlamıştır. Bu çalışmaları, Öklid dışı geometrinin temelini oluşturmuş ve hiperbolik geometri gibi yeni geometri türlerinin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır.

¹⁰ Geometrik önermeler iki sınıfa ayrılır. Bir sınıftaki önermeler ya doğrudan şekillerin büyüklüğü ile ilgilidir ya da dolaylı olarak miktar veya nicelik fikrini içermektedir. Bu tür önermelere metrik denir. Diğer sınıftaki önermeler ise yalnızca



Öklid dışı sistemler kurmuştur. Düz çizgi aksiyomunun reddedildiği bu sistem, küresel bir uzay üzerine temellenmektedir. Russell bu ikinci dönemden sonra metageometri çalışmaları içerisinde en önemli ilerlemenin Arthur Cayley¹¹ ile başlayan üçüncü dönemle yapıldığını ifade etmektedir. Bu dönemde metrik yerine projektif yöntemler kullanılmakta ve tüm metrik özellikler projektif hale getirilerek Cayley tarafından ifade edilen grundgebild şeklin imkanını sağlamaktadır. Ne yazık ki Cayley'in bu alandaki çalışmaları çok fazla bilinmemektedir. Ancak Felix Klein¹², Cayley'in çalışmalarını izleyerek halihazırda o zamanlarda bilinen Öklid dışı geometriye eliptik adını verdiği bir üçüncüsünü inceler. Bu üçüncü tür geometri Russell'a göre Herman von Helmholtz¹³'ün küresel geometrisine çok benzemekle

ele aldıkları şekillerin konumuyla ilgilidir ve nicelik fikri onlara hiç girmez. Bu tür önermelere ise betimleyici (descriptive) denir. Öklid'in Elementler'indeki önermelerin çoğu metrik olup, aralarında tamamen betimleyici bir teorem bulmak kolay değildir. Bknz. (Cremona, 1885, 50)

¹¹ Arthur Cayley (1821-1895), İngiliz matematikçi olup, cebir ve matris teorisi alanlarında önemli katkılarda bulunmuştur. Cambridge Üniversitesi'nde profesör olarak görev yapan Cayley, modern cebirin ve matris teorisinin kurucularından biri olarak kabul edilir. Ayrıca, grup teorisi, projektif geometri ve eliptik fonksiyonlar gibi matematiğin birçok dalında önemli çalışmalar yapmıştır. Cayley, Öklid dışı geometriye katkılarıyla da tanınır. Özellikle, Cayley-Klein modeli olarak bilinen ve hiperbolik geometriyi modellemek için kullanılan bir yöntem geliştirmiştir. Bu model, hiperbolik düzlemin geometri kavramlarını Öklidyen geometri kullanarak açıklamaya çalışır. Cayley, bu modelle hiperbolik geometrinin aksiyomlarını ve teoremlerini görselleştirmiş ve matematiksel olarak daha anlaşılır hale getirmiştir. Bu çalışma, Öklid dışı geometrinin matematiksel temellerini güçlendirmiş ve bu alandaki araştırmaları teşvik etmiştir. Ayrıca bknz. (Cayley, 1889)

¹² Felix Klein (1849-1925), Alman matematikçi olup, geometri ve grup teorisi alanlarındaki çalışmalarıyla tanınır. Klein, geometrik dönüşümleri ve grupları birleştirerek geometriyi sınıflandırmaya yönelik çalışmalar yapmış ve bu yaklaşımıyla modern geometrinin gelişimine önemli katkılarda bulunmuştur. Klein, Öklid dışı geometri üzerine yaptığı çalışmalarla da bilinir. Hiperbolik ve eliptik geometri gibi Öklid dışı geometri türlerini analiz etmiş ve bu geometrileri birleştiren modeller geliştirmiştir. Klein, özellikle Cayley-Klein modeli olarak bilinen ve hiperbolik geometriyi Öklidyen geometri kullanarak açıklayan bir model geliştirmiştir. Bu model, hiperbolik düzlemin geometrik özelliklerini tanımlamak için kullanılır ve Öklid dışı geometrinin matematiksel temellerini güçlendirmiştir.

¹³ Hermann von Helmholtz (1821-1894), Alman fizikçi, fizyolog ve filozof olup, bilim dünyasında çok yönlü katkılarıyla tanınır. Helmholtz, enerji korunumu, termodinamik, optik, akustik ve fizyolojik psikoloji gibi birçok alanda önemli çalışmalar yapmıştır. Helmholtz, Öklid dışı geometriye felsefi ve bilimsel katkılarda bulunmuştur. 1868 yılında yayımladığı "Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" (Geometrinin Temelindeki Olgular Üzerine) adlı makalesinde,



birlikte iki düz çizginin sadece bir noktada kesişmesiyle ayırt edilmektedir. Hem Klein'ın hem de Helmholtz'un geometrilerinin ayırt edici özelliği, bir kürenin yüzeyi gibi sonlu ama sınırsız olan uzayları temel almalarıdır. Böylece projektif denilen türden geometrinin temelleri sağlam şekilde atılmış olup metageometrilere matematik literatüründe yerlerini sağlamlaştırmışlardır. Bu geometrilerin avantajı, Öklid geometrisinde yer alan çelişkilerin söz konusu Öklid dışı geometrilerde ortadan kalkmış olmasıdır. Dolayısıyla bu sistemler, mantıksal yapıları bakımından Öklid geometrisi kadar sağlamdır. Buraya kadar Russell'in ifadesiyle metageometrilere yani Öklid dışı geometrilerin gelişim tarihini özellikle incelemek istediğimiz bir metageometri olan projektif geometri temelinde ele aldık. Ancak söz konusu metageometrilere yine projektif geometri temelinde felsefi tartışmasının yapılabilmesi için geometrinin temellerine ilişkin tüm sorunlarına rağmen hala geçerli olan ve kabul gören yönleriyle Kant'ın transendental felsefesi içinde geometrinin temelleriyle ilgili yaptığı belirlemeleri incelemek gerekmektedir. Böylece Kant'ın geometrinin temelleriyle ilgili düşüncelerinin metinleri üzerinden ele alınmasının ardından bu konuda Kant'a yapılmış eleştiriler özellikle Russell özelinde değerlendirmeye tabi tutulacaktır. Ancak en baştan ifade etmek gerekir ki Russell, Kant'ın geometrinin temelleriyle ilgili yaptığı belirlemelerin eksikliklerinin dökümünü yapsa da temelde kimi Kantçı motifleri hala korumakta ve savunmaktadır.

2-Kant'ta Geometrinin Temelleri

Yeniçağda Descartes felsefesi ile perçinlenen felsefe için model olarak matematik düşüncesi, rasyonalist ve idealist geleneğin dayanak noktası olmuştur. Empirizme karşı rasyonalizm ve idealizmin temel savunusu, matematiğin sağladığı kesin bilgi modeliydi. Bu noktada empiristlerin deneyimden hareketle inşa ettikleri bilgi anlayışını güçlü bir itirazla karşılıyorlardı. Russell'in da belirttiği gibi matematik ve özelde geometri, idealistlerin zapt edilmemiş kalesiydi:

uzayın geometrik yapısının deneysel olarak belirlenebileceği fikrini ortaya atmıştır. Bu çalışmada, Öklid dışı geometrilerin fiziksel uzaya nasıl uygulanabileceği ve bu geometrilerin fiziksel deneylerle nasıl doğrulanabileceği konularını ele almıştır. Helmholtz, uzayın eğrilik kavramını ve farklı geometrik yapıların fiziksel uzayda nasıl var olabileceğini araştırarak, Öklid dışı geometriye olan anlayışımızı genişletmiştir.



“17. ve 18. yy’ın tamamında geometri empirizme karşı başlatılmış savaşta idealistlerin zapt edilemeyen kalesiydi. Kıtada genel olarak deneyimden bağımsız kesin bilginin sadece geometriye işaretle real dünya hakkında mümkün olduğu kabul edilmişti: Ancak bir çılgın onun geçerliliğinden şüphe edebilirdi ve ancak bir aptal onun nesnel referansını reddedebilirdi. Bu sebeple empiristlerin bu konuda biraz zor görevleri vardı; ya sorunu görmezden gelmek zorunda kalacaklardı ya da Hume ve Mill gibi saldırıya geçme cesaretini gösterecekler, temelde Geometrinin sadece mekaniklikten farklı türden bir kesinliğe sahip olmadığı şeklindeki görünüşte paradoksal bir iddiaya sürükleneceklerdi. Uzamsam izlenimlerin sürekli mevcudiyetinin, aksiyomların doğruluğuna dair deneyimimizi mutlak kesinlik gösterecek kadar geniş bir hala getirdiğini söylediler.” (Russell, 1956, 1)

Yukarıdaki alıntıda da görüldüğü gibi rasyonalizme ve idealizme karşı deneyimden kaynaklanan bilgiyi tutarlı bir şekilde savunmak için geometrinin temellerini incelemeye yönelen ilk filozof aslında Hume’du. Ancak Hume, henüz üniversite yıllarında kaleme aldığı ilk ve temel eserinde (*İnsan Doğası Üzerine Bir İnceleme*) geometriyi ayrı bir şekilde incelemiş olsa da daha sonra yayınladığı eserde *İnsanın Anlama Yetisi Üzerine Bir Soruşturma*’da geometri ve aritmetiği aynı kefiye koyup mantıkla birlikte genel olarak matematik başlığı altında ele almıştır. Bu ikinci eserde matematiğe ve mantığa ait yargıların analitik ve a priori karakterde olduğunu iddia etmiştir. Ancak *İnsan Doğası Üzerine Bir İnceleme* adlı eserinde konuyu geometri perspektifinden ele alıp uzay ve uzam kavramlarının analizi üzerinden bir sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Hume söz konusu eserde uzay idesini uzam idesi temelinde inceler:

“Uzay idesi zihne iki duyu yoluyla iletilir: görme ve dokunma; nitekim görülemeyen ve dokunulamayan herhangi bir şey uzamlı olarak nitelendirilemez. Uzamı temsil eden birleşik izlenim: göz ve dokunma duyusu için bölünmez olan ve renk ve katılık ile donatılmış atom ya da zerrrecik izlenimleri diyebileceğimiz çeşitli küçük izlenimlerden oluşmaktadır. Ancak hepsi bu kadar değildir. Bu atomların kendilerini duyularımıza açık kılabilmesi için renkli ya da dokunulabilir olmaları bir zorunluluktur; Ancak aynı zamanda onları hayal gücümüz yoluyla kavrayabilmek için renk ve dokunulabilirliklerinin idesini saklamamız da zorunludur. Bir tek, renk ya da



dokunulabilirliklerinin idesi zihin tarafından kavranabilir kılabilir. Duyulabilen bu niteliklerin idelerinin ortadan kalkması ile uzay ideleri de düşünme yetisi ya da hayal gücü için bütünüyle ortadan kalkar.” (Hume, 2000, 30).

Hume burada uzam idesinin var olması için onların renkli ve dokunulabilir olmaları gerektiğini iddia etmektedir. Dolayısıyla uzay ya da uzam idemiz görme ya da dokunma duyumuzun bir nesnesi değilse o zaman bu türden idelerimizin yani uzay ya da uzam idelerimizin de olmaması gerekir. Hume’un ulaştığı bu sonuç, geometrideki a priori unsurların dolayısıyla aksiyomların a priori karakterlerine ilişkin genel kabulün tatmin edici bir şekilde temellendirilemeyeceği yönünde bir kanının gelişmesine sebep olmuştur. Tam bu noktada geometriye ilişkin sorunun günümüzde tartışıldığı biçimiyle değerlendirebilen kişinin neden Hume değil de Kant olduğu açık bir şekilde görülmektedir. Bu konuda Russell şu değerlendirmeyi yapar: “Sadece modern epistemolojinin yaratıcısı Kant aracılığıyla geometriyle ilgili sorun modern bir form almıştır.” (Russell, 1956) Bu sebeple tüm araştırmacıların geometrinin temellerine ilişkin soruşturmanın Hume ile değil, Kant ile başladığına yönelik tespitleri haklı gerekçelere sahiptir. Bu gerekçeleri incelemek, konuyla ilgili sonraki tüm tartışmaları anlamak ve takip etmek için büyük bir öneme sahiptir. İlk belirtmeliyiz ki Kant, Hume’un geometri ilgili düşüncelerinden habersizdi. Hume’un geometriyi ele alıp incelediği temel eseri *İnsan Doğası Üzerine Bir İnceleme* Kant’ın zamanında Almancaya tercüme edilmemişti. Kant, Hume’un *İnsanın Anlama Yetisi Üzerine Bir Soruşturması*’nda dile getirdiği matematikle ilgili görüşleri temele alıyordu. Bu sebeple Kant *Prolegomena*’da Hume’un saf matematiği sırf analitik a priori yargılardan kurulu olarak kabul ettiğini ifade etmektedir. (Kant, 2002, 18;35b) Dolayısıyla Kant, genel olarak saf matematiğin tüm yargılarını sentetik ve a priori kabul ettiği için araştırmasını Hume’un kabul ettiği ilkelerden ayrı olan ilkelere dayandırmıştır. Kant, *Prolegomena*’da saf matematikle ilgili olduğu kadar saf geometri ile ilgili görüşlerini açık bir şekilde ifade eder:

“Aynı şekilde Saf Geometrinin de hiçbir ilkesi analitik değildir. İki nokta arasında çizilen doğrunun en kısa çizgi olduğu önermesi, sentetik bir önermedir. Çünkü benim ‘doğru’ kavramım nicelikle ilgili hiçbir şey içermez, sadece bir niteliği içerir. ‘En kısa’ kavramı tamamıyla ona eklenir ve ‘doğru çizgi’ kavramının öğelerine ayrılmasından çıkarılamaz. O halde



görünün yardımı gereklidir; ancak onun aracılığıyla sentez olanaklıdır”¹⁴ (Kant, 2002, 17:29b)

Kant, geometricilerin varsaydığı bazı ilkelerin analitik olduğunu ve çelişmezlik ilkesine dayandığını belirtse de bununla kastettiği onların ilke olarak böyle olduğu değil metot zincirinin oluşmasında iş görmesinden dolayı böyle varsayıldığını aslında sırf görüde serimlenebilmeleri sebebiyle matematiğe kabul edildiklerini ifade etmektedir. Kant'ın geometri ile ilgili olarak tam olarak ne düşündüğünü anlamak için *Saf Aklın Eleştirisi*'nde 'transcendental unsurlar öğretisi' başlığı altında ele aldığı transcendental estetikte incelenen uzay kavramına ilişkin yapmış olduğu analizlere bakılması gerekmektedir. Söz konusu bölümde Kant, uzay tasarımıyla ilişkin şunları söyler:

“Dış duyu aracılığıyla (zihnimizin bir özelliği) nesneleri bizim dışımızda gibi ve tümü de uzaydaymış gibi tasarımlarız. Onların formu, büyüklüğü ve birbirleriyle olan bağıntısı uzayda belirlenmiştir ya da belirlenebilir.” (Kant, 1998, 157;A23B37)

Kant, Newton'un uzay anlayışının aksine uzayın mutlak ve bizim dışımızda değil bizdeki zorunlu, a priori bir tasarım daha doğrusu görüş olduğunu söylemektedir Kant'a göre uzayın a priori görüş olması sebebiyle tüm geometrik ilkelerin apodeiktik kesinliği ve a priori kurulma imkanları tam da bu a priori zorunlulukla temellenmiştir. Dolayısıyla uzay tasarımı a posteriori kazanılmış kavram değildir. Bu tasarımın a prioriliğine ilişkin vurgu onun aynı zamanda öznel olduğu iddiasıyla birleşir. Kant *Saf Aklın Eleştirisi*'nde uzay kavramının hem metafizik hem de transcendental serimlemelerini (expositio) yapar. Metafizik serimleme uyarınca Kant, uzayla ilgili şu belirlemeleri yapar:

“1-Uzay, dış deneyimden çıkarılmış bir empirik kavram değildir.

2- Uzay, tüm dış görüşümüzün temeli olan zorunlu bir a priori tasarımdır.

3- Uzay, genelde şeylerin bağıntısına ilişkin genel bir kavram değildir fakat saf bir görüdür.

4- Uzay, verilmiş bir sonsuz büyüklük olarak tasarımlanır.” (Kant, 1998, 174-5;B38B40)

Kant, uzayla ilgili bu metafizik serimlemelere dayanarak uzayın transcendental serimlenmesine geometri ile bağıntısı içerisinde ele almaktadır.

¹⁴ Ayrıca bkzn. (Kant, 1902, 17-18)



Çünkü transendental serimleme ilkece uzay kavramını sentetik a priori bilgilerin kazanılma imkanından hareketle tahlil etmektedir. Kant bu türden sentetik a priori bilgilerin zaten geometride bulunduğunu ifade ederek uzay tasarımıımıza ilişkin belirlemeler yapmaktadır.

“Geometri, uzayın özelliklerini sentetik ve yine de a priori olarak belirleyen bir bilimdir. O halde uzay tasarımıımız onun bu türden bir bilginin olanaklı olması için ne olmalıdır? Bu tasarım kökensel olarak görü olmalıdır; çünkü saf bir kavramdan o kavramın ötesine geçen hiçbir önerme çıkarılamaz ve yine de geometride olan şey budur. Ancak bu görü a priori olmalı yani bir nesnenin bizde bulunan tüm algısından önce gelmeli dolayısıyla da empirik değil ancak saf görü olmalıdır. Çünkü geometrinin tüm önermeleri apodeiktiktirlerdir yani zorunluluklarının bilinci ile bağlıdır; mesela uzayın üç boyutu vardır önermesi durumunda olduğu gibi. Ancak bu tür önermeler empirik ya da deneyim yargıları olamazlar, aynı zamanda onlardan çıkartılamazlar (Kant, 1998, 176;B41).

Kant, uzayın a priori bir görü olduğunu söylediğinde bununla onun adeta zihnin doğuştan bir niteliği olduğunu söylemek istemektedir. Kant’ın diliyle söylemek istersek uzay, duyarlılığımızın a priori formudur; ancak iç duyunun değil dış duyunun formudur. İç duyunun formu zaman iken dış duyunun formu uzaydır. Tam bu noktada Kant, zihnin ya da duyarlılığın bu görüye uygun bir şekilde yapısal olarak uzay deneyimlerimizi organize ettiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla uzaya ilişkin bilgimiz a priori bir karakter kazanmaktadır. Buradan hareketle geometri zorunluluk ve apodeiktik kimliğini tam da duyarlılığımızın uzayla ilgili söz konusu yapısından dolayı kazanmaktadır. Uzayın özellikleri ve uzaydaki nesneler arasındaki bağıntılar, onları bizim dışımızdaymış gibi algıladığımız zihnin, duyarlılığın özellikleridir. Bu sebeple uzay görümüz, uzay tasarımıımız nesnel değil, öznel. Bu öznellik uzay deneyimimizle uyuşan uzaya ilişkin bilgimizin a priori yönünü ifade eder. Uzaya ilişkin a priori bilgimiz geometrik bir bilgidir. İşte tam bu noktada Kant’ın önüne çağının geometri birikimi sınırlar koymaktadır. Kant’ın çağının geometrisi Öklidci geometridir. Dolayısıyla Kant, Öklidci geometrinin yasalarını zorunlu ve a priori yargılardan oluştuğuna inanmaktadır. Herhangi bir Öklid dışı geometrinin imkanı konusunda bir görüşün olmadığı bir çağda Kant’ın uzay anlayışını belirlerken kendisini Öklid geometrisiyle sınırlamış olması son derece anlaşılırdır. Ancak 19. yy’da



devrimci denilebilecek bir nitelikte geometride ortaya çıkan gelişmeler yani Öklid dışı geometrilerin kurulması Öklidci fiziksel uzayın kesinlik karakterinden çok konumu yani Öklid dışı geometrilerin karşısındaki konumu açısından yeniden değerlendirmeye alınmıştır. Temel sorun şudur; mantıksal olarak Öklidci özelliklerden önce gelen başka özelliklere sahip bir geometri mümkün müdür? Öklid dışı geometrilerin ortaya çıkmasında ve özellikle de yukarıda tarihsel oluşumunu vermeye çalıştığımız projektif geometrinin kurulmasıyla söz konusu soru filozoflar tarafından yanıtlanmaya çalışılmıştır. Bu soruna yanıt verme girişiminde en önde gelen isimlerden biri Bertrand Russell'dır. Böylece makalemizin bir sonraki bölümünde Russell'ın bu soruya vermiş olduğu yanıtı ve metageometri olarak projektif geometri ile ilgili görüşlerini inceleyeceğiz.

3-Russell'ın Bir Metageometri olarak Projektif Geometri Anlayışı

Öklidci geometrinin yasaları zorunlu ve a priori yasalardır yani a priori yargılardan kurulu bir sistemdir. En temel meselelerden biri bu tür a priori bir sistemi fizik dünyaya açıklamada nasıl olup da kullanabildiğimizdir. Yukarıda ifade ettiğimiz gibi Kant, Öklidci uzayı görüsel olarak ifade etmişti yani zihnin doğal olarak sahip olduğu bir kapasitedir ya da Kant'ın diliyle söylersek duyarlılığın bir formudur. Bu görüş sayesinde zihin, uzaya ilişkin deneyimleri organize edebilmektedir. Ancak Kantçı geometri anlayışının karşısına çıkan sorun Öklid uzamlılığına bağımlılığıdır. Ancak ister Öklidci olsun isterse Öklid dışı olsun en temel mesele tüm bu geometrilerin uzayın metrik ve niceliksel özellikleriyle ilgili olmalarıdır. İşte Russell için Öklid dışı olsa da uzayın metrik ve niceliksel özellikleriyle ilişki içerisinde kurulmuş herhangi bir geometri yetersiz olacaktır. Tam burada Russell, projektif bir geometrinin bu sınırlamayı aşan bir olanak sunduğunu belirtmektedir. Çünkü projektif bir geometri uzayın metrik ya da niceliksel özellikleriyle değil tasvirici ya da niteliksel özellikleriyle ilgilidir. Bu özellikler yani tasvirsel ve niteliksel özellikler mantıkça tüm Öklidci özelliklerden önce gelir. Burada Russell aslında tipik olan Kantçı zihnin uzayı deneyimlemek için bir tür dışsallık formuna sahip olması gerektiği yolundaki görüşüyle anlaşılmaktadır. Dolayısıyla da mantıksal olarak a priori olan dışsallık formuyla nesnel dış dünyada var olanlar arasında bir uyuşmanın imkanı Kant gibi Russell tarafından da onaylanmaktadır. Ancak Russell'ın temel itirazı Öklid dışı geometrilerin ortaya çıkışıyla bu dışsallık formunun a



priori özelliklerinin Öklidci geometrinin yasalarıyla sınırlanamayacağı yönündedir. Russell burada projektif geometriyi bir çıkış noktası olarak görmektedir. Çünkü söz konusu geometri Öklidci olsun ya da olmasın tüm uzaylar için ortak olan özelliklerle ilgilidir ve bütünüyle a priori olduğu gibi deneyimden de kaynaklanmaz. Çünkü Russell'a göre her zaman niteliksel bağıntılar niceliksel bağıntılardan önce gelmelidir. Dolayısıyla da geometri söz konusu olduğunda niteliksel bir geometri Öklidci olsun veya olmasın metrik bir geometriden önce gelmelidir. Projektif bir geometrinin niteliksel bakış açısına göre uzayın tüm parçaları niteliksel olarak birbirine benzerdir ve sadece biri diğerinin dışında yer alması olgusuyla ayırt edilirler. Yani uzayın homojenliliği ve göreliliği projektif bir geometride esastır. Yine söz konusu geometri de uzay sürekli ve sonsuz bir şekilde bölünebilir.¹⁵ *Nokta* kavramı sonsuz bölünebilirliğin sınırı olarak tanımlanır. İki nokta bir doğru çizgiyi belirlemektedir. Bir çizgi üzerinde olmayan üç nokta da bir yüzeyi belirlemektedir. Uzayın boyutları bu tür bir geometride sonludur.

Russell bu türden bir geometrinin özellikleri hakkında şunları belirtir:

“Şimdi projektif geometri sadece niteliksel sıfatları dikkate alır ve farklı noktaları sadece diğer noktalarla olan bağıntılarına göre ayırt edilebilir. Çünkü tüm noktalar niteliksel olarak benzerdir. Buradan da şu çıkar ki projektif geometride sadece iki nokta verildiğinde onlar aynı doğru çizginin üzerindeki herhangi başka iki noktadan niteliksel olarak ayırt edilemezler. Çünkü bu türden herhangi iki nokta aynı niteliksel bağıntıya sahip olacaktır. Bir doğru çizgi onun noktalarının herhangi ikisi tarafından belirlenmiş bir figür olduğundan ve tüm noktalar niteliksel olarak benzer olduğundan buradan şu sonuç çıkar ki tüm doğru çizgiler niteliksel olarak benzerdir.” (Russell, 1956, 120)

¹⁵ Uzay, elemanları ya noktalar ya da düzlemler olan bir geometrik şekil olarak da düşünülebilir. Noktaları eleman olarak aldığımızda, uzayın doğru çizgileri, çeşitli aralıklar ve uzayın düzlemleri, çeşitli nokta düzlemleri olarak kabul edilir. Diğer yandan, düzlemler eleman olarak kabul edildiğinde, uzayın doğru çizgileri, çeşitli eksen demetlerinin eksenleri ve uzayın noktaları, çeşitli düzlem demetlerinin merkezleri olarak değerlendirilir. Dolayısıyla, uzay, noktaları eleman olarak alarak kurduğumuzda sonsuz sayıda nokta düzlemi veya düzlemleri eleman olarak alarak kurduğumuzda sonsuz sayıda düzlem demeti içerir. (Cremona, 1885, 25)



Russell burada bir örnek olarak Cremona'nın projektif geometriyle ilgili eserinden projektif geometrinin temel operasyonlarını göstermek amacıyla örnek olacak ilkeler alıntılanmaktadır. Bu ilkeler, şu şekildedir:

“Bir sabit nokta S 'den (projeksiyon merkezi) noktalar ve doğru çizgilerden oluşan bir şekli ($ABCD \dots abcd \dots$) projekte etmek, $SA, SB, SC, SD, \dots$ doğrularını veya projekte eden ışınları ve $Sa, Sb, Sc, Sd, \dots$ düzlemlerini (projeksiyon düzlemleri) inşa etmektir. Böylece, tümü S merkezinden geçen doğru çizgiler ve düzlemlerden oluşan yeni bir şekil elde ederiz.

Bir sabit σ düzlemi (çarpaz düzlem) ile düzlemler ve doğru çizgilerden oluşan bir şekli ($\alpha\beta\gamma\delta \dots abcd \dots$) kesmek, $\sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\gamma \dots$ doğru çizgilerini veya izlerini ve $\sigma a, \sigma b, \sigma c \dots$ noktalarını veya izlerini inşa etmektir. Bu yöntemle, σ düzleminde yatan doğru çizgiler ve noktalardan oluşan yeni bir şekil elde ederiz.

Sabit bir doğru s (çarpaz) ile düzlemlerden oluşan bir $\alpha\beta\gamma\delta \dots$ şeklini kesmek, $s\alpha, s\beta, s\gamma \dots$ noktalarını oluşturmak demektir. Bu şekilde, tümü sabit çarpaz s üzerinde bulunan noktalardan oluşan yeni bir şekil elde edilir.

Sabit bir doğru s 'den (eksenden) noktalarla oluşturulmuş $ABCD$ şeklini projekte etmek, $sA, sB, sC \dots$ düzlemlerini inşa etmektir. Bu şekilde elde edilen şekil, hepsi s ekseninden geçen düzlemlerden oluşur.

Bir şekil, sabit bir nokta veya S merkezinden geçen $a, b, c \dots$ doğrularından oluşuyorsa, S 'den geçen bir doğru veya eksen s 'den projekte edilebilir; sonuç olarak $sa, sb, sc \dots$ düzlemlerinden oluşan bir şekil elde edilir.

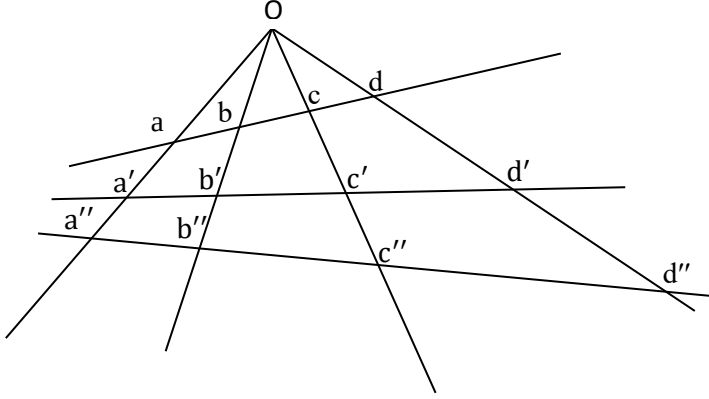
Bir şekil a, b, c doğrularından oluşuyorsa $\dots$ hepsi sabit bir düzlemde yatarken, aynı düzlemde yatan s doğrusu (enine) ile kesilebilir; Ortaya çıkan şekil sa, sb, sc noktalarından oluşur....” (Russell, 1956, 121-122; Cremona, 1885, 1-2.)

Russell'a göre projektif bir geometride matematiksel olarak temel olduğunu söyleyebileceğimiz iki şey vardır. Her projektif geometri anharmonik (armonik olmayan, uyumsuz) bir orana sahiptir¹⁶ ve dörtgen şekilde bir

¹⁶ Projektif özelliklerle (yani projeksiyonla değişmeyen özellikler) ilgilenen Projektif Geometrisi, esas olarak şekillerin betimleyici özellikleriyle ilgilidir. Aslında, bir geometrik şeklin büyüklüğü projeksiyonla değiştiğinden, metrik özellikler genellikle projektif değildir. Ancak, projeksiyonel olan önemli bir sınıf metrik özellik (anharmonik özellikler) vardır ve bunların tartışılması bu nedenle Projektif Geometrisi içinde yer bulunmaktadır. Bknz. (Cremona, 1885, 50)



konstrüksiyondur. Russell anharmonik bir oranın örneği olarak aşağıdaki şekli verir:



Şekil V

Bu şekilde $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ aynı anharmonik oranlara sahiptir. Russell böyle bir şeklin konstrüksiyonun niteliksel tanımlarını şu şekilde belirtir:

Her biri dört noktadan oluşan iki küme, (1) her dörtlü küme tek bir doğru üzerinde yer aldığı ve (2) farklı kümelerin karşılık gelen noktaları tek bir noktadan geçen dört doğru üzerinde ikişer ikişer yer aldığı veya her iki kümenin de herhangi bir üçüncü kümeyle bu ilişkiye sahip olduğunda aynı anharmonik orana sahip olarak tanımlanır[123]. Ve karşılıklı olarak: Dört doğrudan oluşan iki küme, (1) her dört küme tek bir noktadan geçtiğinde ve (2) farklı kümelerin karşılık gelen doğruları, bir doğru üzerinde yer alan dört noktadan ikişer ikişer geçer veya her iki küme herhangi bir üçüncü kümeyle bu ilişkiye sahip olduğunda, aynı anharmonik orana sahip olarak tanımlanır.

Aynı anharmonik oranına sahip iki nokta veya doğru kümesi, projektif geometrinin gözünde eşdeğer olarak kabul edilir: Bu niteliksel eşdeğerlik, metrik geometrinin niceliksel eşitliğinin yerini alır ve tanım gereği, yukarıdaki projektif dönüşümlerin genel tanımına dahildir. (Russell, 1956, 123)



Russell, anharmonik bir yapıda oluşmuş bu türden bir şeklin dörtgen bir konstrüksiyon olarak kuruluşunu ayrıntılı bir şekilde göstermiş olsa da makalemizde hedeflediğimiz tartışmaları aşacağından söz konusu açıklamalara girmeden Russell açısından asıl temel meselenin ne olduğunu şu şekilde ifade edebiliriz: projektif geometrinin analizi göstermektedir ki bu türden bir geometri diğer türden tüm geometrilerden önce gelmekte ve onlara dönüştürülme (transformasyon) imkanını içinde barındırmaktadır.

Uzayın homojenliği ve konumların göreceli oluşu projektif geometri açısından temel bir öneme sahiptir. Niceliksel değil, niteliksel bir uzay anlayışıyla uyuşan bu özellikler aynı zamanda tüm mümkün uzayların a priori özellikleridir. Böylece Russell projektif geometri anlayışıyla Kant'ın Öklidci geometri ile sınırlanmış olan uzay anlayışını aştığı gibi Öklid dışı geometrilerin metrik ve niceliksel dar bakış açısını da aşmış olmaktadır.

4- Kant ve Russell'in Geometri Anlayışlarının Karşılaştırılması

Russell'in Kant'ın geometriye ilişkin düşüncelerine itirazı olduğu kadar onda kabul ettiği bazı fikirler de bulunmaktadır. Aslında Russell, Kant'ın transendental estetikteki görüşlerinin pek çoğuna katıldığını ancak buraya belirli bir sınırlamaya gidilmesi gerektiğini ısrarla vurgulamıştır. Kant ile anlaştıkları noktalardan en önemlisi geometride görünün bir işlevinin olması gerektiğidir. Görü Russell'in dilinde dışsallığın (externality) herhangi bir formunun a priori özellikleri olarak ifade edilmektedir. Russell da Kant gibi deneyimin imkanını koşullu olarak a priori özellikleri kabul etmektedir. Bu koşul Russell için de transendentaldir. Ancak temelde Kant'tan ayrıldığı nokta Kant'ın transendental estetikteki temel tezlerinin aslında yeterince a priori temellere sahip olmadığı yani psikolojik unsurlar içerdiğidir. Russell bu konu hakkındaki *An essay on the foundations of geometry* (Geometrinin temelleri üzerine bir deneme) kitabında şu belirlemeyi yapar:

“Öncelikle, psikolojik unsur Kant'ın tezinde benimkine kıyasla çok daha büyük bir yer tutmaktadır. Elbette ki, bir dışsallık biçiminin işlevini yerine getirebilmesi için salt bir kavram ya da bir çıkarım değil, duyu-algısında verilen bir unsur olması gerektiğini savunacağım—elbette ki başlangıçta yalıtılmış bir biçimde verilmemiş, fakat duyu-algısının nesnesine dik kat ederek analiz yoluyla keşfedilebilir bir unsur. Ancak Kant, bu unsurun



yalnızca verili olduğunu değil, aynı zamanda öznel olduğunu da ileri sürmüştür.” (Russell, 1956, 180).

Pasajda çok açık bir şekilde görüldüğü gibi Russell’ın itirazı dışsallığın formunun duyu algısında verilmiş olmasından ziyade bu formun sadece özneye ait bir şekilde görülmüş olması ve nesneyle bağıntısının hiç kabul edilmemiş olmasıdır. Bu durumda Russell’a göre Kant için uzay kavramsal olmadığı gibi duysal da değildir. Burada Russell’ın aslında duyu algısı ifadesi ile duyumunu kastettiğini belirtmemiz gerekiyor. Dolayısıyla Kant için uzay, duyu verisinin bir parçasını oluşturmaz; öznel bir görüş tarafından sadece ona eklenmektedir. Russell bunun mantıksal olan bir ekleme değil aslında psikolojik olarak uzaydaki nesnelerden önce gelen öznel bir katkı olduğunu ve dolayısıyla da a priori oluşla çeliştiğini söylemek istemektedir. Russell dışsallık formunun duyuda ya da saf görüde verilmiş olmasının aslında önemsiz olduğunu söylemektedir. Çünkü o burada meseleyi psikolojik kılan hususun a priori bir bağıntıyı sadece öznel olarak görmekte yattığını düşünmektedir. Uzayın nesnelere zamansal önceliği epistemolojik bir sorun değildir. Kant’ın tezi epistemolojik tez olmaktan çok psikolojik bir tezdur. Dolayısıyla Kant düşündüğünün aksine geometriyle ilgili görüşünde yani transendental estetiğinde epistemolojik olmaktan çok psikolojik unsurlara yer vermektedir. Russell, öznellik ile a priori arasındaki bağıntının müphem kaldığını ifade etmektedir. Bu noktada kendi görüşünü yine *An essay on the foundations of geometry* kitabında açık bir biçimde ifade eder.

“Bir dışsallık biçiminin özelliklerini a priori olarak ele almanın gerekçesini genel hatlarıyla zaten belirttim. Bu gerekçe, transandantal olup, deneyimin mümkünlüğü için gerekli koşullarda bulunur. Dışsallık biçimi, Riemann’ın manifoldları gibi, hem zamanı hem de Öklidyen ve Öklidyen dışı uzayları kapsayan genel bir sınıf kavramıdır. Ancak manifoldlar gibi uzaya nicel bir benzerlikle gerekçelendirilmez; aksine, birden fazla boyutu varsa, bizim mevcut dünyamızda uzay tarafından yerine getirilen tüm işlevleri yerine getirdiği gerçeğiyle gerekçelendirilir. Ancak, bir dışsallık biçimi bunu başarmak için salt bir kavram değil, gerçekten deneyimlenen bir görüş olmalıdır. Dolayısıyla, böyle bir biçimin kavramı, uzay tarafından fiilen yerine getirilen işlevi yerine getirebilecek her mantıksal olarak mümkün görüşü içeren genel bir kavramdır. Ve bu işlev, çeşitli ama birbirleriyle ilişkili şeylerin deneyimini mümkün kılmaktır.” (Russell, 1956, 178-179)



Görüldüğü gibi Russell, dışsallık biçiminin formunu genel bir sınıf kavramı olarak görmekte ve Öklidci olsun ya da olmasın tüm uzaylar için geçerli olduğunu düşünmektedir. Bu da tam makalemizin başında ifade ettiğimiz gibi projektif geometrinin uzay anlayışla örtüşmektedir. Bu dışsallık formu bir fiil görüde deneyimlenir ancak bu durum onu Russell'ın belirttiği gibi genel bir sınıf kavramı olmasını engellemez. Bu genel sınıf kavramı tüm mümkün uzayları içermektedir. Russell, deneyimi mümkün kılının sadece zihnin yapısı olduğunu düşünmez; dünyada belirli özellikleri sahip olmalıdır. Bunlar dışsallık formlarıdır. Russell bunu şu şekilde ifade etmektedir:

“O halde, dışsallık biçimimiz altında kavramsallaştırılan, duyuşsal algıda bir biçim, özneye göre a priori'dir: dışsallık biçimi deneyim için gereklidir, ancak bu nedenle salt öznel olarak ilan edilmesi gerekmez. Elbette, deneyim için bir zorunluluktur; fakat gerekli koşulların yerine getirilebileceği, ancak nesnel dünyanın belirli özelliklere sahip olması durumunda mümkün olur. Zorunluluğun temeli, güvenle söyleyebiliriz ki, zihinden kaynaklanır; ancak zorunlu olanın doğruluğunun sadece zihnin yapısına dayandığı sonucu hiçbir şekilde çıkmaz. Bu durum söz konusu olmadığında, bir bilgi parçası a priori ilan edildiğinde ulaştığımız sonuç sadece şu olabilir: Zihnin yapısı nedeniyle, dünyanın belirli sıfatlara sahip olduğunu kabul etmedikçe deneyim imkansız olacaktır.” (Russell, 1956, 179).

Yukarıdaki pasajda görüldüğü gibi deneyimin temeli olan zorunluluk saf biçimde sadece öznel tarafından inşa edilmemektedir. Deneyimin mümkün olabilmesi için dünyanın da belirli özelliklere sahip olması gerekmektedir. Tam bu nokta Kant felsefesinde göz ardı edilmiş bir husustur. Zorunluluk zihnin katkısını yanı sıra temelini dünyada da bulmaktadır. Bu dünya ister Öklidci olsun ya da olmasın. Geometrinin a priori aksiyomları dışsallık formuna ilişkin kavrayışımızdan üretilmektedir.

Sonuç olarak Russell, Kant'ın transendental felsefesinde özellikle transendental estetikle ilgili deneyimim imkanına yönelik zorunluluğun kimi psikolojik unsurlarla karıştığını, öznelin katkısının belirli bir uzayla sınırlı bir anlayışa vardırıldığını dolayısıyla da Öklidci geometri dışında bir başka geometriye imkan tanımadığını ve farklı uzayların mümkün olduğunu Öklid dışı geometrileri dışarıda bıraktığını söyleyerek eleştirmektedir. Dolayısıyla Kant'ın geometrinin temellerine ilişkin analizin epistemolojik olmaktan çok psikolojik olduğunu ve burada aslında öznel katkının nesneyi



gözetmeyen psikolojik temelinin Kant'ın tezini zayıflattığını söylemektedir. Asıl meselenin farklı uzayların kabulüne imkan tanıyan yeni bir transendental temelin kurulması olduğunu vurgulamıştır. Russell geometrinin temellerine ilişkin tartışmanın kendi anlayışınca bütünüyle epistemolojiye bağlamak ister:

“Bu nedenle, epistemolojik bir soruşturma bağlamında, Kant'ın psikolojik öğretilerini - en azından uzamsal görüyü duyumdan ayırdığı ölçüde - göz ardı etme hakkına sahibiz ve bunun yerine yalnızca mantıksal yönüne odaklanmalıyız. Onun psikolojik öğretisinin, uzayın salt bir kavram olmadığına dair savı, belirli sınırlamalarla birlikte, mevcut uzaya uygulandığında yeterince açıktır; ancak bizim açımızdan, bu sav, çok daha zor bir teze dönüştürülmelidir: Çeşitliliğin ilişkili olarak deneyimlenmesini mümkün kılan hiçbir dışsallık biçimi salt kavramsal olamaz. Daha sonra geri dönmemiz gereken bu soru, artık psikolojik bir mesele değil, tamamen epistemolojiye aittir.” (Russell, 1956, 181)

Russell, projektif bir geometrinin aksiyomatik temellerini inceleyerek yaptığı analizler sonucunda tüm mümkün uzaylar için geçerli olan ve herhangi bir uzayı temel alan geometrilere dönüşüm (transformasyon) imkanı sağlayan dolayısıyla da Öklidci olsun veya olmasın tüm geometrilere önce gelen bir geometri anlayışının savunusunu yapmaktadır. Böylelikle 19. yy'da öne çıkmış geometrideki gelişmeleri izleyerek bu en eski krize nihayet verme yolunda bir girişimde bulunmaktadır. Bu girişimin başarısı matematikçiler tarafından geliştirilen tüm mümkün projektif geometri sistemleri tarafından desteklenmeye devam etmektedir.

Sonuç

Öklid geometrisinin beşinci postulatı etrafında dönen tartışmalar, geometriye ve matematiğin temel yapı taşlarına yönelik felsefi sorgulamaları şekillendirmiştir. Makalede vurgulandığı üzere, bu tartışmalar, zamanla metageometri kavramının ortaya çıkmasına zemin hazırlamış ve özellikle projektif geometri gibi Öklid dışı geometrilerin gelişimine kapı aralamıştır. Makale boyunca, özellikle Leon Battista Alberti, Girard Desargues, Jean Victor Poncelet ve Felix Klein gibi önemli figürlerin katkılarıyla projektif geometrinin gelişim süreci detaylandırılmış, bu geometrinin tarihsel bağlamı ve matematiksel temelleri ortaya konulmuştur.



Öklid dışı geometrilerin kabulü ve geliştirilmesi, matematiksel düşünce tarihinde köklü değişikliklere yol açmış, bu süreç, Kant'ın transendental felsefesine dayanan geometrik bilgi anlayışıyla derin bir etkileşim içinde olmuştur. Bu bağlamda, Kant'ın geometriye ilişkin düşünceleri, özellikle uzay ve uzam kavramları üzerine yaptığı belirlemeler, metageometri anlayışının felsefi temellerinin anlaşılmasında kritik bir rol oynamıştır. Ancak Russell, Kant'ın geometrinin temellerine dair ortaya koyduğu düşüncelerinin bir kısmını kabul etmekle birlikte birtakım eleştiriler de getirmiş ve bu eleştiriler üzerinden metageometrinin özellikle projektif geometri bağlamında daha derinlemesine bir analizini yapmıştır. Russell'ın düşüncelerinde projektif geometri, uzayın metrik özelliklerinden ziyade niteliksel ve tasvirici yönlerine odaklanarak, Öklidci veya Öklid dışı tüm geometrilerden önce gelen bir yapı olarak ele alınmaktadır. Bu geometri türü, uzayın homojenliğini ve göreliliğini temel alarak, niteliksel bir bakış açısını benimser ve bu bakış açısı, Russell'ın savunduğu epistemolojik temelleri güçlendiren bir rol oynar. Bu bakış açısı, geometrinin sadece matematiksel bir alan değil, aynı zamanda felsefi bir problem alanı olarak da ele alınabileceğini göstermiştir. Russell, Kant'ın uzay anlayışını ve geometriye ilişkin görüşlerini incelerken, Kant'ın psikolojik unsurlarla sınırlandırdığı a priori bilgiye de eleştirel olarak yaklaşmaktadır. Ona göre, Kant'ın uzay ve geometri anlayışı, Öklidci sınırlar içinde kalmış, alternatif geometrilerin imkanını göz ardı etmiştir. Bu sebeple Russell, projektif geometriyi mantıksal ve felsefi bir temel olarak benimser ve bu geometri türünü, tüm uzay türleri için geçerli olan ve onların ötesinde bir anlam taşıyan bir yapı olarak sunmaktadır.

Projektif geometrinin sunduğu imkanlar, sadece matematiksel bir sistem değil, aynı zamanda bir düşünce biçimi olarak farklı uzay anlayışlarını birleştiren ve onları dönüştürme kapasitesine sahip bir yapıyı gözler önüne sermektedir. Russell'ın bu analizleri, hem geometrinin temellerine dair süregelen tartışmalara önemli katkılar sunmuş hem de Kant'ın geometrik düşünce sisteminin sınırlarını aşmayı hedefleyen bir yaklaşımla metageometrinin imkanlarını genişletmiştir.

Sonuç olarak, bu makale projektif geometrinin hem tarihsel gelişimini hem de felsefi temellerini incelemiş, Kant ve Russell'ın geometriye dair düşüncelerini karşılaştırarak bu iki düşünürün matematiksel ve felsefi yaklaşımlarını tartışmıştır. Kant'ın saf görüye dayalı uzay anlayışı, Russell tarafından



hem kabul edilmiş hem de eleştirilmiş, sonuç olarak projektif geometri ile daha geniş bir metageometrik çerçeve sunulmuştur. Bu bağlamda, metageometriye dair yapılan bu analiz, felsefe ve matematik arasındaki güçlü etkileşimi göstermiş ve geometrinin temellerine ilişkin sorunların sadece matematiksel değil, aynı zamanda felsefi boyutlarının da olduğunu ortaya koymuştur.

Kaynaklar

- Alberti, L. B. (2011). *Leon Battista Alberti: On painting: A new translation and critical edition*. Cambridge University Press.
- Blumenthal, L. M. (1980). *A modern view of geometry*. Courier Corporation.
- Cayley, A. (1889). *The Collected Mathematical Papers, Volume 1*.
- Cremona, L. (1885). *Elements of projective geometry*. Clarendon Press.
- Field, J. V., & Gray, J. (2012). *The geometrical work of Girard Desargues*. Springer Science & Business Media.
- Hume, D. (2000). *A treatise of human nature*. Oxford University Press.
- Kant, I. (1902). Kant's Prolegomena to any Future Metaphysics (P. Carus, Çev.). *Philosophical Review*, 11(a).
- Kant, I. (1998). Critique of pure reason (P. Guyer & A. W. Wood, Çev.). *Cambridge University Press, Newyork*.
- Kant, I. (2002). *Gelecekte bilim olarak ortaya çıkabilecek her metafiziğe Prolegomena* (I. Kuşuradi, Çev.; 3. bas). Türkiye Felsefe Kurumu.
- Russell, B. (1956). *An essay on the foundations of geometry* (C. 233). Dover Publications.
- Williams, K., March, L., & Wassell, S. R. (Ed.). (2010). *The Mathematical Works of Leon Battista Alberti*. Springer Science & Business Media.



Öz: Tarih boyunca matematiğin temelleri üzerine yapılan araştırmalar, özellikle Öklid geometrisinin beşinci postulatı etrafında gelişen tartışmalar, metageometri kavramının doğmasına neden olmuştur. Bu makalede, Öklid geometrisinin beşinci postulatının tarihsel ve felsefi bağlamda yarattığı sorunlar, Öklid dışı geometrilerin gelişimine katkıları ve bu süreçte projektif geometrinin bir metageometri olarak nasıl temellendirildiği incelenmektedir. Makalede, projektif geometrinin ilk adımlarının, Rönesans dönemi mimarı ve sanatçısı Leon Battista Alberti ile başladığı ve Fransız matematikçi Girard Desargues'in katkılarıyla matematiksel bir temele oturtulduğu belirtilmiştir. Ayrıca, Jean Victor Poncelet ve Felix Klein gibi matematikçilerin çalışmaları, projektif geometrinin gelişimini ve Öklid dışı geometrilerin kabulünü sağlamıştır. Makale, bu gelişmelerin felsefi arka planını Kant'ın transendental felsefesi üzerinden değerlendirmekte ve Russell'in metageometriye dair düşünceleri ve katkılarını tartışmaktadır. Bu bağlamda, makale projektif geometrinin hem tarihsel gelişimini hem de felsefi temellerini derinlemesine analiz etmektedir.

Anahtar Kelimeler: Metageometri, projektif geometri, Alberti, Desargues, Kant, Russell.



